数理解析研究所講究録
1091 巻 1999 年 94-102

KRONECKER 極限公式の高次元化について II

吉川 謙一 (KEN-ICHI YOSHIKAWA)
名古屋大学・多元数理科学研究科

本稿は第一部の続きである。楕円曲線の高次元化として 2-elementary 双曲型格子を偏極に持つ K3 曲面を考える。このような K3 曲面は Enriques 曲面の普遍被覆 K3 曲面の一般化として自然に現れる。

1. 2-elementary K3 曲面とそのモジュライ空間

1.1 格子偏極 K3 曲面. X をコンパクト複素曲面とする。X は次の条件を満たす時 K3 曲面であると言われる:

$$(1.1) \qquad (1)\quad H^1(X,\mathcal{O}_X)=0,\quad (2)\quad K_X\cong\mathcal{O}_X.$$

(2) により X 上には至る所消えない正則 2 形式が存在する。この正則 2 形式を ω_X と書く。定義から ω_X には非零定数倍の自由度がある。X は実 4 次元多様体なので $H^2(X,\mathbb{Z})$ に交差形式を付加することにより $H^2(X,\mathbb{Z})$ を格子と見る。この時、次のことは良く知られている。即ち、等長写像 $\phi\colon H^2(X,\mathbb{Z})\cong L_{K3}:=U^{\oplus 3}\oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ が存在する。ϕ を marking と言い、(X,ϕ) を marked K3 曲面という。ここで、$U=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ は 2-次元ユニモジュラー双曲型格子であり、E_8 は 8-次元正定値ユニモジュラー偶格子である。又、格子 M に対し、$M(k)$ で M の内積を k-倍した内積を持つ格子を表す。以下、格子とその交差行列をしばしば同一視する。

K3 曲面は Kähler であることが知られており (Siu)、各 Kähler 類は唯一の Ricci-平坦計量で代表される (Yau)。以降、本稿では K3 曲面の計量と言えば Ricci-平坦な物のみ考える。

我々はモジュライ空間上の関数としての解析的トーションに興味があるが、単に K3 曲面を考えたのでは Abel 多様体の場合と同様、自明なものしか得られない。

定理 1.1. X を K3 曲面、κ をその上の Ricci-平坦 Kähler 計量とする。

$$\tau(X,\kappa)=1.\quad\square$$

従って、K3 曲面全体を考えても面白い保型関数は現れない。そこで K3 曲面の特別な族を考えることにする。K3 曲面 X に対して、S_X を Picard 格子、T_X を超越格子とする:

$$(1.2) \qquad S_X:=\{l\in H^2(X,\mathbb{Z});\ \langle l,\omega_X\rangle=0\},\quad T_X:=S_X^{\perp}\cap H^2(X,\mathbb{Z}).$$

定義 1.1. S を L_{K3} の双曲型原始的部分格子、即ち L_{K3}/S は自由 $\mathbb{Z}$-加群で、符合 $(1,k)$ であるとする。K3 曲面 X が S-K3 曲面であるとは、marking ϕ が存在して、$\phi(S_X) \supset S$ が成り立つことである。このような marking を S-K3 曲面の marking と言う。 □

注意. 上の定義は Dolgachev による S-K3 曲面の定義 ([D]) よりも少し弱くなっている。通常は K3 曲面と包含写像 $j : S \hookrightarrow S_X$ の組の適当な同値類を S-K3 曲面と言う。(上の定義では同値関係が [D] より強い。) □

Marked S-K3 曲面 (X, ϕ) に対して、その周期を次のように定める。

定義 1.2.

$$\pi(X,\phi) := [\phi_{\mathbb{C}}(\omega_X)] \in \Omega_S,$$
$$\Omega_S := \{[x] \in \mathbb{P}(T_{\mathbb{C}}); \langle x, x\rangle = 0,\ \langle x, \bar{x}\rangle > 0\}, \quad T = S^{\perp}.$$

ここで、$\phi_{\mathbb{C}} := \phi \otimes \mathbb{C}$, $T_{\mathbb{C}} := T \otimes \mathbb{C}$ 等である。 □

Ω_S は 2 個の連結成分からなり：$\Omega_S = \Omega_S^+ \coprod \Omega_S^-$、各 $\Omega_S^{\pm}$ は IV 型対称有界領域と双正則である。Nikulin によれば S-K3 曲面の普遍族が存在する：

$$\mathcal{P}_S : \mathcal{X}_S \to \tilde{\Omega}_S. \tag{1.3}$$

$\tilde{\Omega}_S$ は非 Hausdorff 非特異解析空間であり、周期写像 $\pi_S : \tilde{\Omega}_S \to \Omega_S$ は至る所局所同型で全射であることが知られている。

1.2 2-elementary 格子と反シンプレクティク対合. 我々は L_{K3} の原始的部分格子の中で、2-elementary 格子に興味がある。これらの格子を偏極に持つ K3 曲面は反シンプレクティク対合を持つからである。

定義 1.3. 偶格子 S が 2-elementary であるとは、S の内積による双対格子を $S^{\vee}$ とする時、$A_S := S^{\vee}/S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{l(S)}$, $l(S) \geq 0$、と書ける時をいう。 □

S の不変量として、$sgn\, S = (r_+(S), r_-(S))$, $r(S) := rk_{\mathbb{Z}} S$, $l(S) := \dim_{\mathbb{F}_2} A_S$ は自然である。それ以外に $\{0,1\}$-値不変量δ_S が存在することが知られている（[Kn, 定義 (2.12)]）。Nikulin によれば、不定値 2-elementary 格子の不変量 (r_+, r_-, l, δ) はその等長類を決定する。L_{K3} に原始的埋め込みを持つ偶 2-基本的格子は Nikulin により分類されている ([N])。又、$T = S^{\perp}$ に対して、A_T と A_S は自然に同型であることが知られている。

L_{K3} に原始的埋め込みを持つ 2-elementary 格子と代数的 K3 曲面の反シンプレクティク対合について説明する（[Kn, §6] も参照)。L_{K3} の部分格子 $L' = S \oplus T$ を考えると、その上には次の対合 $I_S : L' \to L'$ が存在する：

$$I_S(x,y) = (x,-y) \quad (x \in S,\ y \in T). \tag{1.4}$$

Nikulin によれば I_S は L_{K3} 上の対合 I_S に一意的に拡張される。従って marking により I_S は勝手な marked S-K3 曲面 (X, ϕ) のコホモロジー格子上の対合を定める。これを I_X とする：$I_X := \phi^{-1} \circ I_S \circ \phi$. I_X がいつ X 上の対合から誘導されるのかは次の Piatetskii-Shapiro-Shafarevich 及び Burns-Rapoport による Torelli 定理からわかる。

定理 1.2. (X,κ), (X',κ') を Kähler K3 曲面とする（κ,κ' は Kähler 類）。γ : $H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X',\mathbb{Z})$ を次の条件を満たす等長写像とする：
(1) $\gamma_{\mathbb{C}}(\omega_X) = \lambda\,\omega_{X'}$ $(\lambda \in \mathbb{C}^*)$, (2) $\gamma_{\mathbb{R}}(\kappa) = \kappa'$.
この時、同型写像 $g: X' \to X$ が一意的に存在して $g^* = \gamma$ である。 □

I_X が X の対合から来ていることを見るには定理 1.2 の (1), (2) を $X = X'$ に対して確かめれば良く、次が結論される。

$$(1.5) \qquad \Delta_S = \{d \in S;\ \langle d,d\rangle = -2\}, \quad \Delta_T = \{d \in T = S^{\perp};\ \langle d,d\rangle = -2\}$$

をそれぞれ S,T のルート全体とする。各 $d \in \Delta_T$ に対して、d の鏡映面を H_d とする：$H_d := \{x \in \Omega_S;\ \langle x,d\rangle = 0\}$. Ω_S の判別式軌跡を $\mathcal{H}_M$, その補集合を Ω_S^0 で定める：

$$(1.6) \qquad \mathcal{H}_M := \bigcup_{d\in\Delta_T} H_d, \quad \Omega_S^0 := \Omega_S \backslash \mathcal{H}_M.$$

この時、$\pi_S(X,\phi) \in \Omega_S^0$ ならば、X 上に対合 $\iota: X \to X$ が一意的に存在して

$$(1.7) \qquad \iota^* = \phi^{-1} \circ I_S \circ \phi, \quad \iota^*\omega_X = -\omega_X$$

が成立する。(1.7) の 2 番目の条件を満たす対合を反シンプレクティク対合と呼ぶ。逆に、代数的 K3 曲面 X 上に反シンプレクティク対合 ι が与えられたとする。ι^* の $H^2(X,\mathbb{Z})$ への作用に関する不変部分を $H^2_+(X,\mathbb{Z})$, 反不変部分を $H^2_-(X,\mathbb{Z})$ とする。$H^2_+(X,\mathbb{Z})$ は代数的サイクルから成るので、L_{K3} に原始的埋め込みを持つ双曲型偶格子であり、Nikulin の定理より 2-elementary である。X の marking ϕ を固定して、L_{K3} の 2-elementary 原始的部分格子 S を以下の様に定める：

$$(1.8) \qquad S := \phi(H^2_+(X,\mathbb{Z})) = \{l \in L_{K3};\ I_S(l) = l\}, \quad I_S := \phi \circ \iota^* \circ \phi^{-1}.$$

この様に L_{K3} の 2-elementary 原始的部分格子（の $O(L_{K3})$-作用に関する同値類）と反シンプレクティク対合を持つ K3 曲面の不変格子とは 1 対 1 に対応する。

定義 1.4. 反シンプレクティク対合を持つ代数的 K3 曲面を 2-elementary K3 曲面と言う。(X,ι) が S-2-elementary K3 曲面であるとは、marking ϕ が存在して $I_S = \phi \circ \iota^* \circ \phi^{-1}$ となることである。 □

(1.3) と同様に、S-2-elementary K3 曲面のモジュライ空間とその上の普遍族が存在する：

$$(1.9) \qquad \mathcal{P}_S: \mathcal{X}_S^0 \to \tilde{\Omega}_S^0, \quad \iota_S: \mathcal{X}_S^0 \to \mathcal{X}_S^0, \quad \pi_S(\tilde{\Omega}_S^0) = \Omega_S^0$$

I_S を定義 1.4 の対合とする時、$\mathcal{I}_S: \tilde{\Omega}_S \ni (X,\phi_X) \to (X, I_S\phi_X) \in \tilde{\Omega}_S$ は $\tilde{\Omega}_S$ の対合を定める。$\tilde{\Omega}_S^0$ は $\mathcal{I}_S$ の固定集合として得られる $\tilde{\Omega}_S$ の開集合である。S-2-elementary K3 曲面のモジュライ空間は以下のように Ω_S^0 の算術商として得られる。$O(T)$ の部分群 Γ_S を以下のように定める。

$$(1.10) \qquad \Gamma_S = \{g|_T;\ g \in O(L_{K3}),\quad g \circ I_S = I_S \circ g\}.$$

Γ_S は Ω_S と $\mathcal{H}_S$ に固有不連続に作用し、Ω_S^0/Γ_S は準射影的代数多様体になる (Baily-Borel)。簡単のため、以降 $\mathcal{M}_S := \Omega_S/\Gamma_S$, $\mathcal{M}_S^0 := \Omega_S^0/\Gamma_S$ とおく。

定理 1.3. S-2-elementary K3 曲面のモジュライ空間は $\mathcal{M}_S^0$ である。 □

(X,ι) を 2-elementary K3 曲面とする。ι の固定集合については次のことが Nikulin ([N], [Kn, 定理 (6.3)]) により知られている。

命題 1.1. $X^\iota=\{x\in X;\ \iota(x)=x\}$ を (X,ι) の固定集合とすれば、

$$X^\iota=\begin{cases}(1)\quad \emptyset & (S=U(2)\oplus E_8(-2)\Longleftrightarrow(r,l,\delta)=(10,10,0)),\\ (2)\quad C_1^{(1)}+C_2^{(1)} & (S=U\oplus E_8(-2)\Longleftrightarrow(r,l,\delta)=(10,8,0)),\\ (3)\quad C^{(g)}+\sum_{i=1}^k E_i & (\text{上以外})\end{cases}$$

である。ここで、$C^{(g)}$ は種数 g の非特異曲線を表し、E_i は非特異有理曲線を表す。(3) の場合、g 及び k は以下の式で与えられる。

$$g(S)=11-\frac{r(S)+l(S)}{2},\quad k(S)=\frac{r(S)-l(S)}{2}.$$

(1)、(2) の場合にも便宜上それぞれ $g(S)=0,1$ と定める。 □

$\mathcal{A}_g=\mathfrak{S}_g/\Gamma_g$ を g-次元主偏極 Abel 多様体のモジュライ空間とし、$\mathcal{A}_g^*$ をその佐竹コンパクト化とする。又、$\mathcal{M}_S^*$ を $\mathcal{M}_S$ の Baily-Borel コンパクト化とする。

定理 1.4. 正則写像 $j_S:\mathcal{M}_S\to\mathcal{A}_{g(S)}$ を次のように定める：

$$j_S:\mathcal{M}_S\ni(X,\iota)\to[Jac(X^\iota)]\in\mathcal{A}_{g(S)}.$$

ここで、$Jac(X^\iota)$ は X^ι の Jacobi 多様体を表す。この時 j_S は $\mathcal{M}_S^*$ から $\mathcal{A}_{g(S)}^*$ への有理写像に拡張する。但し命題 1.1 の例外 (2) の場合は、j_S は $S^2(\mathcal{A}_1)$ （$\mathcal{A}_1$ の二次対称積）に値をとる。 □

1.3 モジュライ空間上の一般化された保型形式. $\mathcal{L}_S$ を Ω_S 上の重さ 1 の保型形式のなす層とする。以下では $\mathcal{L}_S$ とそれに付随した直線束とを同一視する。Γ_S は一般に自明でない指標を持つが、$\Gamma_S/[\Gamma_S,\Gamma_S]$ は有限群になるため (Kazhdan)、その値は $U(\mathbb{C})$ に必ず入る。Γ_S の指標χ に付随する $\mathcal{M}_S$ の直線束を $[\chi]$ で表す。又、$\mathcal{L}_g$ を $\mathcal{A}_g$ 上の重さ 1 の Siegel 保型形式の層とする。(Siegel モジュラー群 Γ_g の指標は $g>2$ ならば自明である。) $\mathcal{L}_S$, $\mathcal{L}_g$ はそれぞれ $\mathcal{M}_S^*$, $\mathcal{A}_g^*$ 上の豊富直線束と同一視される。定理 1.4 により j_S のグラフΓ_{j_S} の $\mathcal{M}_S^*\times\mathcal{A}_g^*$ 内での閉包は射影的代数多様体であり、それを $\hat{\mathcal{M}}_S$ と書く。この時、$pr_1:\hat{\mathcal{M}}_S\to\mathcal{M}_S$ は双有理正則写像である。

定義 1.5. $\hat{\mathcal{M}}_S$ 上の層 $\mathcal{L}_S^k\otimes\mathcal{L}_{g(S)}^q[\chi]$ の正則断面を重さ (p,q) の指標 χ-付き保型形式と呼ぶ。 □

注意. $\mathcal{L}_S^k\otimes\mathcal{L}_{g(S)}^q[\chi]$ の正則断面を重さ (p,q) の保型形式と呼ぶのは本稿だけの呼び方である。一般にこのような断面に名前がないので、ここではそう呼ぶ。以降、簡単のため指標は略す。従って、単に保型形式と言えば、それはある指標付のものを意味する。 □

$\mathcal{L}_S$, $\mathcal{L}_g$ はともに Hermite 対称領域上の保型関数の層なので、その Bergman 核から定まる自然な Hermite 計量を持つ（Petersson ノルム）。以降、$\mathcal{L}_S^k\otimes\mathcal{L}_{g(S)}^q[\chi]$ には $\mathcal{L}_M$ と $\mathcal{L}_g$ の Petersson ノルムから定まる計量 $\|\cdot\|$ （Petersson ノルムと呼ぶ）を入れて、Hermite 直線束と見る。

2. 2-elementary K3 曲面に対する Kronecker 極限公式

本節では 2-elementary K3 曲面の同変解析的トーション（を固定曲線の解析的トーションで補正した量）が、モジュライ空間上の一般化された保型形式で書けることを解説する。従って、本節の結果が本稿の主結果である。

(X,ι) を 2-elementary K3 曲面とする。その Kähler 計量とは X の Ricci-平坦 Kähler 計量であって、ι-不変なものを言う。(X,ι,κ) を Ricci-平坦 2-elementary K3 曲面とする。ι は各 $(0,q)$-形式の空間 $\wedge^{0,q}(X)$ を次のように分解する：

$$(2.1)\quad \wedge^{0,q}(X)=\wedge^{0,q}(X)_{+}\oplus\wedge^{0,q}(X)_{-},\quad \wedge^{0,q}(X)_{\pm}=\{f\in\wedge^{0,q}(X);\ \iota^{*}f=\pm f\}.$$

$\square^{0,q}$ を (X,κ) のラプラシアンとすると、ι が等長変換なことから $\square^{0,q}$ は各 $\wedge^{0,q}(X)_{\pm}$ を保つ。そこで次のように $\square^{0,q}_{\pm}$ を定義する：$\square^{0,q}_{\pm}:=\square^{0,q}|_{\wedge^{0,q}(X)_{\pm}}$. 定理 1.1 より、通常の解析的トーションは K3 曲面に対して自明であるため、群作用に関する同変版を考える。

定義 2.1. (X,ι,κ) の同変解析的トーション $\tau(X,\iota,\kappa)$ は次式で定義される：

$$\tau(X,\iota,\kappa):=\prod_{q\geq 0}(\det\square^{0,q}_{+})^{(-1)^{q}q}.\quad\square$$

多少の計算の後に、$\tau(X,\iota,\kappa)=\det\square^{0,0}_{-}/\det\square^{0,0}_{+}$ が従う。この様に、通常の解析的トーションが K3 曲面に対して自明になるのに、同変解析的トーションは自明にならない。これは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-対称性の効用である。第一部で取り挙げたテータ因子も Abel 多様体から来る自然な $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-対称性を持っている（$\iota: z\to -z$ がそうである)。この対合に関する同変解析的トーションを考えても、Jacobi の Δ-関数や$\Delta_{g}(\tau)$ といった保型形式が現れる。従って、同変解析的トーションを考えることは第一部の結果を一般化する上で不自然なことではない。

前節の様に、$X^{\iota}=\sum_{i}C_{i}$ を (X,ι) の固定曲線とする。各曲線に κ の制限を考えることにより $(C_{i},\kappa_{C_{i}})$ は Kähler 多様体である。従って、その解析的トーション $\tau(C_{i},\kappa_{C_{i}})$ を考えることができる。これらを用いて 2-elementary K3 曲面 (X,ι) の不変量を次のように定義できる。

定義 2.2. (X,ι,κ) は Ricci-平坦 S-2-elementary K3 曲面であるとする。又、$X^{\iota}=\sum_{i=0}^{k}C_{i}$ を ι の固定曲線とする。この時、$\tau_{S}(X,\iota,\kappa)$ を次のように定める：

$$\tau_{S}(X,\iota):=vol(X,\kappa)^{\frac{14-r(S)}{8}}\tau(X,\kappa,\iota)\left\{\prod_{i=0}^{k}vol(C_{i},\kappa_{C_{i}})\tau(C_{i},\kappa_{C_{i}})\right\}^{\frac{1}{2}}.\quad\square$$

定理 2.1. τ_{S} は Ricci-平坦計量に依らない。従って、モジュライ空間 $\mathcal{M}^{0}_{S}$ 上の C^{∞}-関数を定める。 $\square$

上の $\tau_{S}(X,\iota)$ が κ に依存しないことは全く自明なことではない。アノマリー公式（第一部・定理 2.2）の同変版と Monge-Ampère 方程式の解を用いて証明される。

次の τ_{S} の変分公式は重要である。

定理 2.2. $d_S = \partial_S + \bar{\partial}_S$ を $\mathcal{M}_S$ 上の外微分とすれば、$\mathcal{M}_S^0$ 上次の公式が成り立つ：

$$\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}_S\partial_S \log\tau_S = -\frac{r(S)-6}{8}\omega_S - \frac{1}{2}j_S^*\omega_{\mathfrak{S}_{g(S)}}.$$

ここで、$\omega_S, \omega_{\mathfrak{S}_{g(S)}}$ はそれぞれ Ω_S, $\mathfrak{S}_{g(S)}$ の Bergman Kähler 形式であり、j_S は定理 1.4 の写像である。 □

定理 2.2 は $T\mathcal{X}_S^0/\tilde{\Omega}_S$ 上に Ricci-平坦 Kähler 計量の族を考え、それに対して曲率公式（第一部・定理 2.1）の同変版と Ricci-平坦 Monge-Ampère 方程式を使って証明される。

定理 2.2 より $\mathcal{M}_S^0$ での τ_S の振舞いはおよそわかったと言えるが、$\mathcal{H}_S$ に接近する時の挙動は制御しきれていない。実際、$\mathcal{H}_S$ に特異性を持つ Γ_S-不変な多重調和関数は $\partial_S\bar{\partial}_S$-作用素で消えるので、定理 2.2 からは捉えることはできない。多くの S に対し、$\mathcal{M}_S^0$ は準アフィン代数多様体であることが知られており、この場合には $\mathcal{H}_S$ で超越的な振舞いをし、かつ Γ_S-不変な多重調和関数が沢山存在する。以上のような例を考えれば、τ_S の境界挙動を調べることは τ_S を理解する上で非常に重要である。それに関しては次がわかる。

命題 2.2. $\gamma : \Delta \to \Omega_S$ を正則曲線で、$\gamma(0)$ で $\mathcal{H}_S$ に横断的に交わるとする。この時、次の漸近公式が成り立つ：

$$\log\tau_S(\gamma(s)) = -\frac{1}{8}\log|s|^2 + O(1) \quad (s \to 0). \quad \square$$

定理 2.3. $\log\tau_S$ は $\mathcal{M}_S$ 上局所可積分で、次のカレント方程式が成立する：

$$\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}_S\partial_S \log\tau_S = \frac{1}{8}\delta_{\mathcal{H}_S} - \frac{r(S)-6}{8}\omega_S - \frac{1}{2}j_S^*\omega_{\mathfrak{S}_{g(S)}}.$$

ここで、$\delta_{\mathcal{H}_S}$ は $\mathcal{H}_S$ に台を持つ Dirac のδ-関数である。 □

命題 2.1 と定理 2.3 の証明には、K3 曲面の I 型退化に対する Ricci-平坦計量の退化の詳しい理解が必要である。又、τ_S の発散を標準的な ALE-インスタントンの場合に帰着するために、アノマリー（Bott-Chern 類）を評価する必要がある。これらは第一部・定理 2.2 と Monge-Ampère 方程式の解の一様 C^2-評価と高次の C^k-評価を確かめることにより示される（[Kb] の一般化）。この様にして問題を ALE-インスタントンに帰着させ、その熱核を詳しく解析することにより上の命題が証明される（[Y, §4 − 7] を参照）。

定理 2.4. $r(S) < 18$ とする。

(1) $\hat{\mathcal{D}}_S$ （pr_1^{-1} による $\mathcal{D}_S := \mathcal{H}_S/\Gamma_S$ の固有像）にのみ 1 次の零を持つ $\hat{\mathcal{M}}_S$ 上の重さ $(r(S)-6, 4)$ の保型形式 Φ_S が存在して、次が成り立つ：

$$pr_1^*\tau_S = \|\Phi_S\|^{-\frac{1}{4}}.$$

(2) $\delta \in \Delta(T)$ に対し、$\langle S, \delta\rangle$ を S と δ を含む最小の 2-elementary 格子とすれば、$\langle S, \delta\rangle$ は L_{K3} の原始的部分格子で、$\Omega_{\langle S,\delta\rangle} = H_\delta$ である。この時 $\Phi_{\langle S,\delta\rangle}$ は Φ_S の

H_δ への正規化された制限として与えられる。即ち、z を H_δ の一般の点とすれば、$(\Phi_{\langle S,\delta\rangle}, \Phi_S$ をそれぞれ$\Omega_{\langle S,\delta\rangle}, \Omega_S$ 上の関数と見なした時）次が成り立つ：

$$\sigma_{\langle S,\delta\rangle}(z) = \frac{\langle\cdot, l_S\rangle_T}{\langle\cdot,\delta\rangle_T}\Phi_S\bigg|_{H_\delta}(z) = \lim_{w\to z,\, w\in\Omega_S^0}\frac{\langle w, l_S\rangle}{\langle w,\delta\rangle}\Phi_S(w). \quad \square$$

Baily-Borel によれば、保型形式の零因子はモジュラー多様体 $\mathcal{M}_S^*$ の豊富因子である。従って、モジュラー多様体からその因子を除いた開集合は準アフィン代数多様体（アフィン多様体の Zariski 開集合）である。結局、定理 2.4 より次の系を得る。

系 2.1. S-2-elementary K3 曲面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_S^0$ は、$r(S) > 6$ ならば準アフィン代数多様体である。 $\square$

3. Enriques 曲面の解析的トーションと Borcherds の Φ-関数

本節では前節の特別な場合 $S = U(2)\oplus E_8$ について、定理 2.4 の保型形式が Borcherds の構成した保型形式で与えられることを見る。

Enriques 曲面とは次の条件を満たすコンパクト複素曲面 Y のことである：

$$(3.1) \qquad (1)\ \ H^1(Y,\mathcal{O}_Y) = 0, \quad (2)\ \ K_Y \not\cong \mathcal{O}_Y, \quad (3)\ \ K_Y^2 \cong \mathcal{O}_Y.$$

Enriques 曲面は射影代数多様体であることが知られている。又、Enriques 曲面 Y の位相に関して次が知られている。

命題 3.1.
(1) $\mathbb{Z}$-加群として $H^2(Y,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{10}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。ここで、$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は $c_1(K_Y)$ で生成される。
(2) 等長写像 $\phi_Y : H^2(Y,\mathbb{Z})_f \to E := U\oplus E_8(-1)$ が存在する。ここで、$H^2(Y,\mathbb{Z})_f$ は $H^2(Y,\mathbb{Z})$ の自由部分を表す。 $\square$

E を命題 3.1 の Enriques 格子とし、$L_{K3} = U\oplus E\oplus E$ を K3-格子とする。L_{K3} 上で次の対合 I を考える：

$$(7.2) \qquad I : U\oplus E\oplus E \ni (h, m, m') \to (-h, m', m) \in U\oplus E\oplus E.$$

この時、$L_\pm = \{x\in L_{K3};\, Ix = \pm x\}$ は次の格子に等長的である：

$$(7.3)\ \ L_+ = E(2) = U(2)\oplus E_8(-2), \quad L_- = U(2)\oplus E(2) = U(2)\oplus U(2)\oplus E_8(-2).$$

$S = E(2)$ とおけば、前節の様に $E(2)$-2-elementary K3 曲面を考えることができる。$E(2)$-2-elementary K3 曲面と Enriques 曲面との関係は次で与えられる。

命題 3.2. Y を Enriques 曲面、$\tilde{Y}$ をその普遍被覆空間とする。この時、$\tilde{Y}$ は $E(2)$-2-elementary K3 曲面であり、その対合を $\iota : \tilde{Y}\to\tilde{Y}$ とすれば $Y = \tilde{Y}/\iota$ である。 $\square$

命題 3.2 より、Enriques 曲面と $E(2)$-2-elementary K3 曲面とは同一視できる。

定義 3.1. $E(2)$-2-elementary K3 曲面としての Marking を Enriques 曲面の Marking と呼ぶ。又、$E(2)$-2-elementary K3 曲面としての周期写像を Enriques 曲面の周期写像と呼ぶ。 □

定理 1.3 より、Enriques 曲面のモジュライ空間は $\mathcal{M}_{E(2)} = \Omega^0_{E(2)}/\Gamma_{E(2)}$ と同型である（堀川、浪川）。

さて、Borcherds（[B2]）は $\Omega_{E(2)}$ 上の $\mathcal{H}_{E(2)}$ を特徴付ける保型形式を構成した。以下でその保型形式を簡単に復習する。まず格子 Λ, T を次で定める：

$$\Lambda = U \oplus E_8(-2), \quad T = L_- = U(2) \oplus \Lambda. \tag{3.4}$$

Λ の光錐 C_Λ を次で定める：

$$C_\Lambda = \{v \in \Lambda \otimes \mathbb{R};\ \langle v, v\rangle > 0\}. \tag{3.5}$$

Λ が双曲型格子なので、C_Λ は 2 個の連結成分から成る：$C_\Lambda = C_\Lambda^+ \coprod C_\Lambda^-$. この時、$\Omega_{E(2)}$ は次の管状領域の表示を持つ。

命題 3.3. 管状領域 $\Lambda_\mathbb{R} + i\,C_\Lambda$ は以下の写像により、$\Omega_{E(2)}$ と双正則である：

$$\Lambda_\mathbb{R} + i\,C_\Lambda \ni v \to \left(\left(\frac{1}{2}, -\frac{\langle v, v\rangle}{2}\right), v\right) \in \Omega_{E(2)}. \quad \square$$

Borcherds Φ-関数は上の管状領域の表示を用いて次の様に定義される。W_Λ を Λ の Wyle-群とする：

$$W_\Lambda = \langle s_l;\ s_l(x) = x + \langle x, l\rangle l, \quad l \in \Delta_\Lambda\rangle \subset O(\Lambda). \tag{3.6}$$

Λ のベクトル ρ, ρ' を次で定義する：

$$\rho = ((0,1),0), \quad \rho' = ((1,0),0) \in \Lambda = U \oplus E_8(-2). \tag{3.7}$$

定理 3.1 ([B2]). $\Lambda_\mathbb{R} + i\,C_\Lambda^+$ 上の正則関数 Φ を次で定義する：

$$\Phi(y) = \sum_{w \in W_\Lambda} \det(w) e^{2\pi i\langle \rho, w(y)\rangle} \prod_{n>0}\left(1 - e^{2\pi i\langle n\rho, w(y)\rangle}\right)^{(-1)^n 8}.$$

この時、次が成立する：
(1) Φ は $\mathcal{H}_{E(2)}$ に 1 次の零を持つ $\Omega_{E(2)}$ 上の重さ 4 の保型形式である。
(2) $Im\, y \gg 0$ の時、Φ は次の無限積表示を持つ：

$$\Phi(y) = e^{2\pi i\langle \rho, y\rangle} \prod_{r \in \Pi^+}\left(1 - e^{2\pi i\langle r, y\rangle}\right)^{(-1)^{\langle r, \rho-\rho'\rangle} c\left(\frac{\langle r, r\rangle}{2}\right)}.$$

ここで、Π^+ は次で定まる Λ の部分集合であり：

$$\Pi^+ = \{l \in \Lambda;\ \langle l, \rho\rangle > 0, \quad \text{or} \quad l = m\rho\ (m \in \mathbb{Z}_+)\},$$

$\{c(n)\}_{n \geq -1}$ は次の母関数で定まる数列である：

$$\sum_{n=-1}^{\infty} c(n)\, q^n = \eta(\tau)^{-8}\eta(2\tau)^8\eta(4\tau)^{-8}, \quad \eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i\tau}. \quad \square$$

注意. Φ はある generalized Kac-Moody 超代数の分母関数として定義される ([B1])。 □

さて、$\Phi_{E(2)}$ を定理 6.1 で構成された保型形式とする。$E(2)$-2-elementary K3 曲面の対合は固定集合を持たないから、$\Phi_{E(2)}$ は$\Omega_{E(2)}$ 上の重さ $r(E(2)) - 6 = 4$ の $\Gamma_{E(2)}$ に関する保型形式である。定理 2.4 によれば、$\Phi_{E(2)}$ の零は $\mathcal{H}_{E(2)}$ に一致する。従って、Borcherds の定理（定理 3.1）と定理 2.4 を合わせて次の定理を得る。

定理 3.2. 非零定数 $C_{E(2)}$ が存在して、次が成立する：

$$\Phi = C_{E(2)}\,\Phi_{E(2)}.$$

特に、Ricci-平坦 Enriques 曲面 (Y_s, κ) に対して、その解析的トーションは次の式で与えられる：

$$\tau(Y_s, \kappa) = C'_{E(2)} \sqrt{vol(Y_s, \kappa)}\, \|\Phi(s)\|^{-\frac{1}{4}}.$$

ここで、$s = \pi_{E(2)}(Y_s) \in \Omega_{E(2)}$ であり、$C'_{E(2)}$ は普遍定数である。 □

定理 3.2 は Harvey-Moore（[H-M]）によって既に観察されていたものである。(Jorgenson-Todorov ([J-T]) は次数 2 の Enriques 曲面の普遍被覆曲面のラプラシアンの行列式が Borcherds の Φ-関数であると主張しているが、これは間違いである。実際、この関数は $\mathcal{H}_{E(2)}$ 以外の因子でも消える。）定理 3.1 と 3.2 によれば、Enriques 曲面の解析的トーションは Jacobi のΔ-関数に類似した無限積表示を持つ。この意味でも定理 3.2 は Kronecker 極限公式の 2 次元版と言って良いであろう。（第一部の $\Delta_2(\tau)$ も定理 3.1 と類似の無限積表示を持つことが知られている（[G-N]）。）

$E(2)$ 以外の $g(S) = 0$ となる格子や命題 1.1 (2) の格子に対して、Φ_S が適当な generalized Kac-Moody superalgebra の分母関数として得られ、その結果 Borcherds の Φ-関数と同様な無限積表示を持つこと、$(r, l, \delta) = (16, 6, 1)$ となる格子 S に対して Φ_S がテータ関数の積で書けること等、この他にも書くべきことはあるが紙数の都合で省略した。参考文献についてもかなり重要なもの以外は省略した。論文 [Y] を見て頂けると幸いである。

References

[B1]. Borcherds, R.E., *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*, Invent. Math. **109** (1992), 405-444.

[B2]. ———, *The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra*, Topology **35** (1996), 699-710.

[D]. Dolgachev, I., *Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces*, J. Math. Sci. **81** (1996).

[G-N]. Gritsenko, V., Nikulin, V., *Siegel automorphic form corrections of some Lorentzian Kac-Moody Lie algebras*, Amer. J. Math. **119** (1997), 181-224.

[H-M]. Harvey, J., Moore, G., *Exact gravitational threshold correction in the FHSV model*, Phys. Rev. D **57** (1998), 2329-2336.

[J-T]. Jorgenson, J., Todorov, A., *Enriques surfaces, analytic discriminants, and Borcherds's Φ-function*, Comm. Math. Phys. **191** (1998), 249-264.

[Kb]. Kobayashi, R., *Moduli of Einstein metrics on a K3 surface and degeneration of type I*, Adv. Study Pure Math. **18-II** (1990), 257-311.

[Kn]. Kondo, S., 二次形式と *K3* 曲面・*Enriques* 曲面, 数学 **42** (1990), 346-360.

[N]. Nikulin, V.V., *On the quotient groups of the automorphism group of hyperbolic forms by the subgroup generated by 2-reflections*, J. Soviet Math. **22** (1983), 1401-1476.

[Y]. Yoshikawa, K.-I., *Generalized Enriques surfaces and analytic torsion*, math.AG/9808129 (1998).